

Control Basado en Pasividad de un doble péndulo subactuado con efectos de fricción dinámicos*

Cecilia Cornejo-Romero** y Luis Alvarez-Icaza ***

Instituto de Ingeniería,
Universidad Nacional Autónoma de México
04510 Coyacán DF, México

Resumen Se presenta el modelo dinámico en ecuaciones Hamiltonianas controladas por puerto (EHCP) de un doble péndulo subactuado, al que se incorpora un modelo de fricción dinámico no lineal para describir la fricción en las articulaciones. Con base en el modelo, se diseña un controlador basado en pasividad por asignación de interconexión y amortiguamiento (CBP-AIA), que tiene una acción global sobre el sistema. Se incluyen resultados de simulación.

Palabras clave sistemas subactuados; fricción no lineal; Control Basado en Pasividad

1. Introducción

La técnica de modelado de sistemas por ecuaciones Hamiltonianas controladas por puerto (EHCP) busca analizar su comportamiento desde una perspectiva de intercambio de energía y a partir de ella identificar que elementos permiten llevar a cabo una manipulación de la energía del sistema con el objeto de lograr un comportamiento deseado (Ortega, R. *et al.*, 2002).

Esta técnica se ha usado con buen éxito para el modelado y control de sistemas mecánicos (Ortega, R. *et al.*, 2001). Sin embargo, la inclusión de los efectos de fricción en sistemas mecánicos en el marco de EHCP se ha limitado a incluir efectos lineales de fricción viscosa (Acosta J. A. *et al.*, 2005) y ha ignorado los efectos de fricción dinámica no lineales que son comunes en esta clase de sistemas. Una de las razones para esto estriba en las dificultades modelar estos efectos en el marco de EHCP.

En este trabajo se propone un modelo de fricción dinámico, desarrollado a partir del modelo de LuGre (Canudas de Wit y Olsson H., 1995) y de evidencia experimental (Jiménez, R. y Álvarez, L., 2005), que describe la fricción dinámica en las uniones de un manipulador robótico. Las coordenadas generalizadas del modelo se extienden para incluir los estados internos asociados con los modelos dinámicos de fricción. La estructura resultante preserva las propiedades de los sistemas en EHCP, es decir, pasividad y estabilidad en el sentido de Lyapunov del punto de energía mínima.

* Investigación patrocinada mediante convenio CONACyT 47583 y UNAM-DGAPA-PAPIIT IN117108.

** Estudiante de posgrado CCornejoR@iingen.unam.mx

*** Investigador y corresponsal alvar@pumas.iingen.unam.mx

El modelo en ECHP con efectos de fricción se desarrolla para el caso particular de un doble péndulo subactuado con fricción no lineal en las articulaciones y, a partir de la técnica de Control Basado en Pasividad por Asignación de Interconexión y Amortiguamiento (CBP-AIA), se diseña una ley de control que permite estabilizar el péndulo en el punto de equilibrio inestable en lazo abierto.

La estructuración del trabajo es la siguiente. En la sección dos se describe el modelo de fricción no lineal y en la sección tres se resume la técnica de modelado por EHCP, incluyendo el modelo de fricción dinámico. En la sección cuatro se presenta el diseño de la ley de control por CBP-AIA, y en la sección cinco se presentan los resultados de simulación. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo y la dirección para trabajo futuro.

2. Descripción del modelo de fricción dinámico

La fricción se presenta cuando se producen fuerzas tangenciales por el contacto de superficies sólidas sobre las que actúan fuerzas normales. Algunos elementos que caracterizan la fricción son las propiedades de volumen de los cuerpos: dureza, fragilidad, parámetros térmicos y parámetros elásticos (módulo de Young, módulo de corte, energía elástica almacenada, entre otros) y las propiedades de las superficies: las reacciones químicas de la superficie con el ambiente, películas o capas de sustrato aplicadas para reducir la fricción, etc. Algunos fenómenos asociados a la fricción son particularmente difíciles de representar. Entre ellos se encuentra el efecto Stribeck, cuyo comportamiento describe la transición de fricción estática a fricción dinámica y que se representa en la Fig. 1.

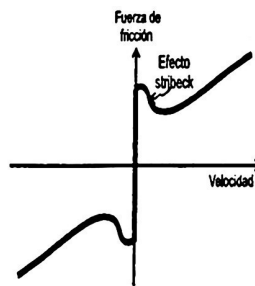


Figura 1. Curva de fricción vs. velocidad que muestra el efecto Stribeck.

Los modelos dinámicos de fricción proponen una visión microscópica para analizar este fenómeno. Así, a estos modelos se les asocia un estado interno que describe la deformación promedio de las imperfecciones microscópicas del material en la zona de contacto. A las imperfecciones se les denomina cerdas o peines, por la similitud de su

comportamiento mecánico con el de objetos con estas formas geométricas, que primero se deforman y luego se deslizan¹.

Los modelos más dinámicos de fricción más populares para fines de control son el modelo de (Dahl, 1976) y el modelo de LuGre (Canudas de Wit y Olsson H., 1995), que tiene la siguiente estructura

$$F_{fr} = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{s} \quad (1)$$

$$\dot{z} = \dot{s} - \frac{\sigma_0 \|\dot{s}\| z}{g(s)} \quad (2)$$

donde F_{fr} es la fuerza de fricción, $\dot{s}$ es la velocidad relativa de las superficies en contacto, z es el estado interno de deformación promedio de las cerdas, σ_i con constantes convenientes y $g(s)$ es una función incluida para describir el efecto Stribeck.

Desde el punto de vista de las EHCP, resulta claro que el modelo de LuGre no presenta efectos acoplados entre la velocidad relativa de movimiento de la superficie y la de deformación de las cerdas. Este tipo de términos corresponde a los términos de Coriolis en las formulaciones dinámicas de sistemas mecánicos. Para poder incluir estos efectos, en este artículo se propone modificar el modelo de LuGre para darle la siguiente estructura

$$F_{fr} = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{s} - \sigma_1 a_2 \|\dot{s}\| \dot{s} \quad (3)$$

$$\dot{z} = \dot{s} + a_2 \|\dot{s}\| \dot{s} - \frac{a_2 \sigma_0}{\sigma_1} \|\dot{s}\| z \quad (4)$$

con a_2 una constante.

Al sustituir (4) en (3) y simplificar se obtiene

$$F_{fr} = \sigma_0 z + (\sigma_1 + \sigma_2) \dot{s} - a_2 \sigma_0 \|\dot{s}\| z \quad (5)$$

Es también posible expresar (4) y (5) en la siguiente forma, que resultará de utilidad más adelante

$$\begin{bmatrix} -F_{fr} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_1 + \sigma_2 & -a_2 \|\dot{s}\| \\ -a_2 \|\dot{s}\| & \frac{a_2}{\sigma_1} \|\dot{s}\| \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \sigma_0 z \end{bmatrix} \quad (6)$$

El funcionamiento de este modelo fue comprobado con datos experimentales obtenidos del comportamiento de un amortiguador magnetoreológico en (Jiménez, R. y Álvarez, L., 2005).

3. Ecuaciones Hamiltonianas Controladas por Puerto

Las EHCP permiten modelar dinámicas de sistema de parámetros concentrados de tal forma que la estructura de las ecuaciones del modelo permite evidenciar la interconexión y la disipación de energía en el sistema (Ortega *et al.*, 1998). Otra ventaja

¹ Ver (Armstrong H  louvy B. *et al.*, 1994) para un resumen extensivo de distintos modelos de fricci  n.

al utilizar esta metodología es que la conexión en configuración de retroalimentación de sistemas modelados en EHCP genera un sistema que conserva las propiedades intrínsecas de las EHCP, además de permitir aplicar CBP-AIA de forma más simple. Una forma general de las EHCP es

$$\dot{x} = [J(x) - R(x)] \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)u \quad (7)$$

$$y = g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x) \quad (8)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es vector de estados, $J(x) = -J(x)^T$ es la matriz de interconexión, $R(x) = R(x)^T \geq 0$ es la matriz de amortiguamiento, $H(x)$ es la función de almacenamiento de energía y u, y son la entrada y la salida, respectivamente cuyo producto genera unidades de potencia.

El sistema en (7) y (8) es pasivo de u a y con $H(x)$ la función de almacenamiento de energía pues satisface

$$\underbrace{H[x(t)] - H[x(0)]}_{\text{energía-almacenada}} = \underbrace{\int_0^t u^T(t)y(t)dt}_{\text{fuente-de-energía}} - \underbrace{d(t)}_{\text{energía-disipada}}$$

con $d(t)$ la función que captura los efectos de disipación del sistema.

Cuando no se ejerce acción de control, ($u = 0$), la función $H(x)$ es no incremental, esto es $H[x(t)] \leq H[x(0)]$, y decreciente en la presencia de disipación. Si la función de energía es acotada por debajo, el sistema se estabiliza en el equilibrio. Además, si $H(x)$ es no negativa se tiene $-\int_0^t u(t)y(t)dt \leq H[x(0)] < \infty$, que muestra que la energía que el sistema puede disipar es acotada.

3.1. Dinámica del doble péndulo con fricción dinámica en EHCP

En la figura 2 se presenta el diagrama de cuerpo libre de un doble péndulo con actuación sólo en la primera articulación. Para este sistema mecánico, cuando no se consideran efectos dinámicos de fricción, el modelo en EHCP tiene como estados las posiciones angulares $[q_1 \ q_2]^T$ y el momento angular $[p_1 \ p_2]^T$. La función de energía es

$$H = \frac{1}{2}p^T M^{-1}(q)p + U(q)$$

donde $\frac{1}{2}p^T M^{-1}(q)p$ es la energía cinética y $U(q)$ la energía potencial del sistema. Adicionalmente se presenta la siguiente relación que es útil para el modelado del sistema

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = M^{-1}p = \begin{bmatrix} \mu_{11}(q) & \mu_{12}(q) \\ \mu_{21}(q) & \mu_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

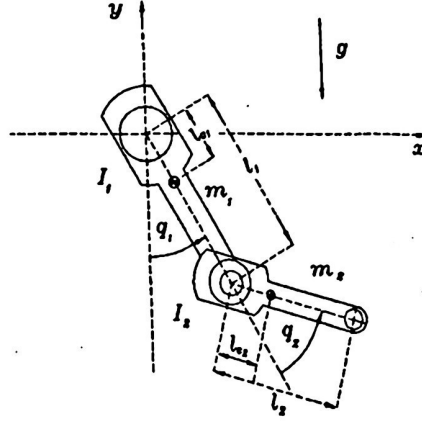


Figura 2. Diagrama de cuerpo libre de un manipulador de dos grados de libertad

Cuando se incorporan los efectos dinámicos de fricción, se debe incorporar un estado interno, z_i , con dinámica dada por (4), donde $\dot{s} = \dot{q}_i$ y un juego de constantes para cada articulación. La función de energía se modifica para incluir la energía potencial de estos estados internos para quedar como

$$H = \frac{1}{2} [p_1 \ p_2] \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} - (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos(q_1) \\ - m_2 g l_{c2} \cos(q_1 + q_2) + \frac{1}{2} \sigma_0 z_1^2 + \frac{1}{2} \sigma_0 z_2^2 \quad (10)$$

A partir de (10), al seguir la forma general en (7) y utilizar (9) se obtiene el modelo dinámico del manipulador que se presenta en (11).

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 0 & -a_2 \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & -a_2 \Upsilon \\ 0 & 0 & -a_2 \Lambda & 0 & \frac{a_2}{\sigma_1} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 \Upsilon & 0 & \frac{a_2}{\sigma_1} \Upsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{q_1} H \\ \nabla_{q_2} H \\ \nabla_{p_1} H \\ \nabla_{p_2} H \\ \nabla_{z_1} H \\ \nabla_{z_2} H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (11)$$

donde: $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, $\Lambda = |\mu_{11} p_1 + \mu_{12} p_2|$, $\Upsilon = |\mu_{21} p_1 + \mu_{22} p_2|$.

4. Diseño de una ley de CBP-AIA

Para el diseño de la ley de control se propone una dinámica deseada en EHCP para el sistema en lazo cerrado de la forma

$$\dot{x} = [J_d(x) - R_d(x)] \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) \quad (12)$$

con elementos que aseguren que $J_d(x) = -J_d^T(x)$ (matriz antisimétrica de interconexión deseada), $R_d(x) = R_d^T(x) \geq 0$ (matriz de amortiguamiento deseada), H_d con mínimo en x_* (función de almacenamiento de energía deseada) y x_* el punto de equilibrio deseado para el sistema en lazo cerrado.

Existen varias metodologías para el diseño de leyes de CBP-AIA. Una de ellas consiste en diseñar el sistema de lazo cerrado de acuerdo con la siguiente

Proposición 1 (Ortega, R. et al., 2002) *Dados $J(x)$, $R(x)$, $H(x)$, $g(x)$ y el punto de equilibrio deseado a ser estabilizado $x_* \in R^n$, asumir que se pueden encontrar las funciones $\beta(x)$, $J_a(x)$, $R_a(x)$ y el vector $\kappa(x)$ que satisfagan*

$$[J(x) + J_a - (R(x) + R_a(x))] \kappa(x) = -[J_a(x) - R_a(x)] \frac{\partial H_d}{\partial x}(x)$$

donde J_a es la asignación de interconexión, R_a la asignación de amortiguamiento, H_a la función de almacenamiento de energía deseada y $\beta(x)$ la ley de control, tal que se asegure:

- Preservación de estructura
- Integrabilidad
- Asignación de equilibrio
- Estabilidad de Lyapunov

Bajo estas condiciones, la ley de control $u = \beta(x)$ proporciona un sistema de lazo cerrado (12), cuya función de almacenamiento de energía es de la forma

$$H_d(x) = H(x) + H_a(x) \quad (13)$$

además se cumple que

$$\frac{\partial H_a}{\partial x}(x) = \kappa(x) \quad (14)$$

El equilibrio en lazo cerrado está dado por

$$x_* = \left\{ x \in R^n \mid \left[\frac{\partial H_d}{\partial x} \right]^T R_d \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) = 0 \right\} \quad (15)$$

y el estimado del dominio de atracción está dado por $\{x \in R^n \mid H_d(x) \leq c\}$. $\square$

A partir de la dinámica de la planta descrita por la ecuación (7) y el sistema deseado en lazo cerrado dado por (20) La ley de CBP-AIA está dada por

$$\beta(x) = [g^T(x)g(x)]^{-1}g^T(x)\{[J_d(x) - R_d(x)]\nabla H_a - [J_a(x) - R_a(x)]\nabla H(x)\} \quad (16)$$

donde se debe satisfacer además una condición de apareamiento².

² Ver (Ortega, R. et al., 2002) para más detalles.

4.1. Ley de CBP-AIA para el doble péndulo con fricción dinámica

Para el caso del doble péndulo es posible demostrar que si el punto de equilibrio deseado en lazo cerrado corresponde con la posición erguida vertical, entonces las siguientes asignaciones satisfacen los requisitos de la proposición

$$H_d = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos(q_1) \\ + m_2 g l_{c2} \cos(q_1 + q_2) + \frac{1}{2} \sigma_0 z_1^2 + \frac{1}{2} \sigma_0 z_2^2 \quad (17)$$

$$R_d = R + \begin{bmatrix} R_{11d} & R_{12d} \\ R_{12d} & R_{22d} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Donde la ley de CBP-AIA es

$$\beta(x) = \frac{1}{\tau} \{ 2(m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \sin(q_1) + 2m_2 l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ + R_{11d}(\mu_{11} p_1 + \mu_{12} p_{12}) + R_{12d}(\mu_{21} p_1 + \mu_{12} p_{22}) \} \quad (19)$$

La dinámica de lazo cerrado, después de realizar las sustituciones correspondientes en (17) se muestra en (20).

Al comparar las Ecs. (20) y (11), se observa la introducción de los términos R_{11d} , R_{12d} y R_{22d} asociados a la asignación de amortiguamiento extra en el sistema de lazo cerrado.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{11d} + \sigma & R_{12d} & -a_2 \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & R_{21d} & R_{22d} + \sigma & 0 & -a_2 \Upsilon \\ 0 & 0 & -a_2 \Lambda & 0 & \frac{a_2}{\sigma_1} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 \Upsilon & 0 & \frac{a_2}{\sigma_1} \Upsilon \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \nabla_{q_1} H \\ \nabla_{q_2} H \\ \nabla_{p_1} H \\ \nabla_{p_2} H \\ \nabla_{z_1} H \\ \nabla_{z_2} H \end{bmatrix} \quad (20)$$

5. Resultados de simulación

En esta sección se presentan los resultados de un experimento realizado por simulación que consiste en mostrar que la ley de CBP-AIA puede llevar al doble péndulo a la posición erguida vertical. Se proponen como condiciones iniciales que el primer brazo se localice a 36° y que la posición angular del segundo brazo sea 18° , según el sistema de referencia mostrado en la figura 2.

Las figuras 3 y 4 muestran la trayectoria de los dos brazos del péndulo doble. Se observa que ambos brazos se encuentran cerca de la posición inferior de acuerdo con el sistema de referencia adoptado y que al entrar en acción la ley de CBP-AIA los brazos llegan a la posición vertical superior. La ley de control empleada para el único actuador en el primer brazo se muestra en la figura 5. Es importante notar que esta ley de control es continua y que no es necesario usar una ley conmutada (Aracil J. y Gordillo F., 2005) para primero impulsar el doble péndulo y luego estabilizarlo en la posición de equilibrio inestable en lazo abierto.

6. Conclusiones y trabajo futuro

Se han incluido efectos dinámicos de fricción para sistemas mecánicos modelados en el marco de EHCP. Para ello se propuso una modificación al modelo dinámico de fricción de LuGre que permite incorporar los estados internos de dicho modelo en el marco del modelo dinámico en EHCP. Esta modificación permite asegurar las propiedades de pasividad inherentes a esta formulación. Se aplicó esta formulación para el caso de un péndulo doble subactuado con efectos dinámicos de fricción en las articulaciones. A partir de este modelo en EHCP se ha propuesto una ley de control global diseñada por la metodología de CBP-AIA que estabiliza al doble péndulo en la posición vertical erguida en lazo cerrado. Esta ley evita la solución tradicional al problema de control del doble péndulo erguido que consiste en recurrir a la conmutación entre dos leyes de control (Aracil J. y Gordillo F., 2005); la primera de ellas proporciona un fuerte impulso inicial y la otra se utiliza cuando el doble péndulo se encuentra en una vecindad de la posición erguida. Queda aún por verificar experimentalmente los resultados obtenidos por simulación.

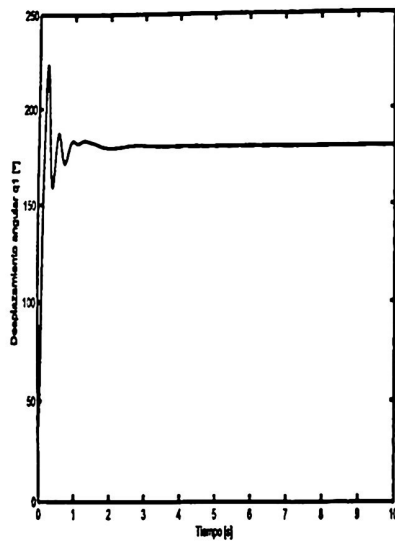


Figura 3. Desplazamiento angular brazo 1

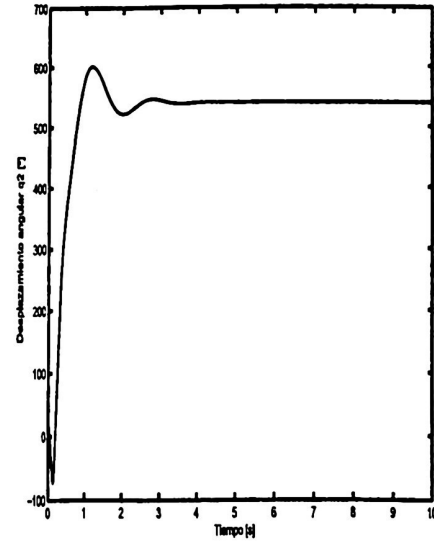


Figura 4. Desplazamiento angular brazo 2

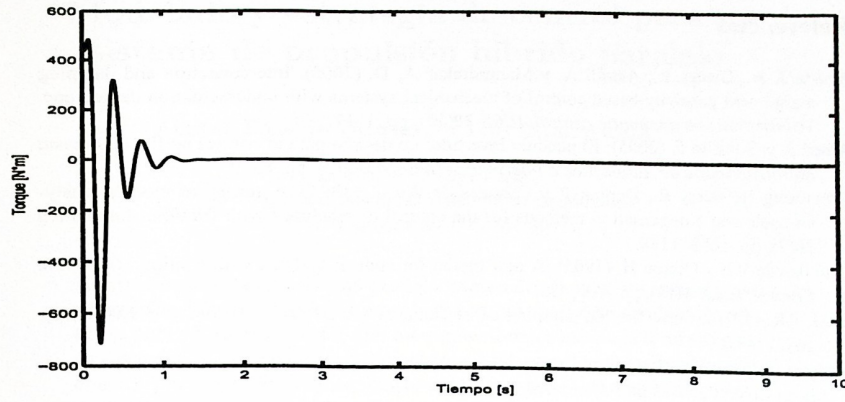


Figura 5. Ley de control

Parámetros amortiguador	
σ_2	$0,2[N \cdot s/m]$
σ_1	$0,1[N \cdot s/m]$
σ_0	$1 \times 10^{-4}[N/(V \cdot m)]$
a_2	$1 \times 10^{-4}[s/m]$

Parámetros del robot		
l_1	0,450	[m]
l_2	0,450	[m]
l_{c1}	0,091	[m]
l_{c2}	0,048	[m]
m_1	23,902	[kg]
m_2	3,880	[kg]
I_1	1,226	[kg · m ²]
I_2	0,093	[kg · m ²]
g	9,81	[m/s ²]

Matriz de inercia, de Coriolis y vector de gravedad.

$$M_{11}(q) = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2$$

$$M_{12}(q) = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2$$

$$M_{21}(q) = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2$$

$$M_{22}(q) = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

$$C_{11}(q) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 (\mu_{21} p_1 + \mu_{22} p_2)$$

$$C_{12}(q) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 [(\mu_{11} p_1 + \mu_{12} p_2) + (\mu_{21} p_1 + \mu_{22} p_2)]$$

$$C_{21}(q) = m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 (\mu_{11} p_1 + \mu_{12} p_2)$$

$$C_{22}(q) = 0$$

$$g_1(q) = [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2)$$

$$g_2(q) = m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2)$$

Referencias

- Acosta J. A., Ortega R., Astolfi A. y Mahindrakar A. D. (2005). Interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems with underactuation degree one. *Transactions on automatic control, IEEE* 20(12), pp. 1–17.
- Aracil J. y Gordillo F. (2005). El péndulo invertido: un desafío para el control no lineal. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* 2(2), pp. 8–19.
- Armstrong H elouvry B., Dupont P. y Canudas de Wit C. (1994). A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica* 30(7), pp. 1083–1138.
- Canudas de Wit y Olsson H. (1995). A new model for control systems with friction. *Automatic Control, IEEE* 41(3), pp. 419–425.
- Dahl, P.R. (1976). Solid friction damping of mechanical vibrations. *AIAA Journal* 14(12), pp. 1675–1682.
- Jim enez, R. y  lvarez, L. (2005). LuGre friction model for a magnetorheological damper. *Structural Control and Health Monitoring* 12(1), 91–116.
- Ortega, R., A. L  ria, P. Nicklasson y H. Sira-Ram  rez (1998). *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*. Springer. Great Britain.
- Ortega, R., Van der Schaft, A., Bernhard, M. y Escobar, G. (2002). Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems. *Automatica* 38(4), pp. 585–596.
- Ortega, R., Van der Schaft, A. J., Mareels, I. y Maschke B. (2001). Putting energy back in control. *Control Systems Magazine, IEEE* 21(2), pp. 18–33.